Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 6, Dec. 2016
Published on Web 01/12/2016
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة, ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016م

دالة جاما (Gamma Function)

أ. حنان صالح أبو شحمة *

ملخص البحث:

تهدف هذه الورقة العلمية إلي دراسة دالة جاما وأهم نظرياتها، حيث تم استخدام هذه النظريات في حل بعض المسائل.

الكلمات المفتاحية: دالة جاما.

(1) مقدمة البحث:

نظرا لوجود جوانب متقدمة في الرياضيات التي تحتاج إلي دوال أخري غير الدوال الأولية والتي بواسطتها نستطيع حساب تكاملات صعبة أو حل معادلات تفاضلية معقدة، لذلك ظهرت الحاجة إلي دوال خاصة مثل دالة جاما، بيتا، لجندر وغيرها من الدوال الخاصة وهذه الدوال مهمة أيضا في مجالات العلوم التطبيقية.

لقد عرفت هذه الدالة بطرق مختلفة ومن أهم هذه التعريفات ما يلي:

(1−1) تعريف وايرستراس (Werierstrass definition) [4]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

حيث $z \neq 0,-1,-2,\ldots$ ، و γ يسمي ثابت أويلر و يعرف بواسطة

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - ln(m) \cong 0.5772156649$$

(2−1) تعريف النهاية اللانهائية لأويلر (Infinite limit definition) [4]

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\ ; z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

---

* قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة مصراتة.

يمكن اشتقاق تعريف (1− 2) من تعريف (1− 1) و ذلك كالآتي:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln(m))z}\prod_{n=1}^{m}\left\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln(m))z}.e^{(-z-\frac{z}{2}-\cdots-\frac{z}{m})}\prod_{n=1}^{m}\left\{(1+\frac{z}{n})\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} e^{-zln(m)}.\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{z}{n})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} m^{-z}\prod_{n=1}^{m}(\frac{n+z}{n})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^z}\cdot\frac{(1+z)}{1}\cdot\frac{(2+z)}{2}\cdots\frac{(m+z)}{m}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^z}\cdot\frac{1}{m!}(1+z)(2+z)\ldots(m+z)$$

بوضع $m = n$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

(1−3) تعريف أويلر التكاملي (Integral Euler definition) [4]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt; \quad Re(z) > 0$$

(1−4) صيغة لاجندر المضاعفة لدالة جاما(Legender's duplication formula) [4]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

(2) نظريات علي دالة جاما

نظرية (2−1)

$$\Gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

الإثبات أولا باستخدام تعريف (1−1)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

و بنفس الخطوات السابقة في اثبات تعريف (1−2) نجد أن

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} m^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left\{(1+\frac{z}{n})\right\}$$

بوضع $z = 1$ نجد أن:

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = 1\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\prod_{n=1}^{m}\left\{(1+\frac{1}{n})\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{m}(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{m}(2)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\dots\left(\frac{m}{m-1}\right)\left(\frac{m+1}{m}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{m+1}{m}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = 1 \to \quad \Gamma(1) = 1$$

ثانيا الإثبات باستخدام تعريف (1−2)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}\right\}$$

بوضع $z = 1$ نجد أن:

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n}{(1)(2)(3)\dots(1+n)}\right\}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 6, Dec. 2016
Published on Web 01/12/2016
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة, ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016م

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n}{(1+n)!}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$\therefore\ \Gamma(1) = 1$$

ثالثا الإثبات باستخدام تعريف $(3-1)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

بوضع $z=1$ نجد أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{0}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt$$
$$\therefore\ \Gamma(1) = 1$$

نظرية $(2-2)$

$$\Gamma'(1) = -\gamma$$

البرهان

لإثبات هذه النظرية نرجع إلي التعريف $(1-1)$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$-\ln\Gamma(z) = \ln(z) + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n+z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$$

بالتفاضل بالنسبة إلي z

$$\frac{-1}{\Gamma(z)}\cdot\Gamma'(z) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{n+z}\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right\}$$
$$\frac{-1}{\Gamma(z)}\cdot\Gamma'(z) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n+z}\right) - \frac{1}{n}\right\}$$

نضع $z=1$

$$\frac{-1}{\Gamma(1)}\cdot\Gamma'(1)=1+\gamma+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n}\right\}$$
$$\frac{-1}{\Gamma(1)}\cdot\Gamma'(1)=1+\gamma+\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)\right]$$
$$\frac{-1}{\Gamma(1)}\cdot\Gamma'(1)=1+\gamma+\lim_{m\to\infty}\left(-1+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$\frac{-\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=1+\gamma-1$$
$$-\Gamma'(1)=\Gamma(1)\gamma$$
$$\therefore\ \Gamma'(1)=-\gamma$$

نظرية (3-2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

البرهان : من تعريف (3-1) نجد أن:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

بوضع $z=\frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بفرض أن

$$x^2=t\to 2xdx=dt$$
$$t=0\to x=0$$
$$t=\infty\to x=\infty$$

$$\therefore I=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}.x\,dx$$
$$I=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
$$I^2=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

و بدلالة الإحداثيات القطبية (r,θ) نجد أن:

$$x = rcos(\theta), y = r\sin(\theta), dxdy = rdrd\theta$$

و بالتالي يصبح التكامل كما يلي:

$$I^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, rdrd\vartheta = \pi$$

$$\therefore I = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \sqrt{\pi}$$

نظرية (2−4)

$$\boldsymbol{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$$

البرهان: أولا باستخدام تعريف (1−1)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

و بنفس الخطوات السابقة في إثبات تعريف (2−1) نجد أن:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^z}\cdot\frac{(z+1)}{1}\cdot\frac{(z+2)}{2}\cdots\frac{(z+m)}{m}$$

بوضع $(z+1)$ بدلا من z

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = (z+1)\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^{z+1}}\cdot\frac{(z+2)}{1}\cdot\frac{(z+3)}{2}\cdots\frac{(z+m+1)}{m}$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{z}{(z+1)}\lim_{m\to\infty}\frac{m^{z+1}}{m^z}\cdot\frac{(z+1)(z+2)\ldots(z+m)}{1.2\ldots m}\cdot\frac{1.2\ldots m}{(z+2)(z+3)\ldots(z+m+1)}$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{z}{(z+1)}\lim_{m\to\infty}\frac{m^{z+1}}{m^z}\cdot\frac{(z+1)}{(z+m+1)}$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z.\lim_{m\to\infty}\frac{m}{(z+m+1)}$$

$$\therefore \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z \to \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 6, Dec. 2016
Published on Web 01/12/2016
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة, ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016م

ثانيا باستخدام تعريف $(2-1)$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

بوضع $z+1$ بدلا من z

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} \cdot \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n!\, n^{z}}$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nz}{z+n+1}\right) = z\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{z+n+1}\right)$$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z \to \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

ثالثا باستخدام تعريف $(3-1)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

بوضع $z+1$ بدلا من z

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z}\, dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئة نجد أن

$$u = t^z \to du = zt^{z-1}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \to v = -e^{-t}$$

$$\Gamma(z+1) = 0 + \int_0^\infty z e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

$$\therefore\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

من النظرية السابقة نستنتج أن :

$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$ ، حيث n عدد صحيح موجب

البرهان

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$= n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(3)(2)(1)$$

$$\therefore \Gamma(n+1) = n!$$

ملاحظة (1)

إذا كان n عدد صحيح سالب فإن $(n! = \pm\infty)$ ، فإذا كان $n=-1$ ، فإن

$$\Gamma(-1+1) = -1! \rightarrow \Gamma(0) = \pm\infty$$

أي أن عندما تقترب n من الصفر من ناحية اليمين فان $\Gamma(0)$ تقترب من ∞ و في حالة n تقترب من الصفر من ناحية اليسار فان $\Gamma(0)$ تقترب من $-\infty$.

وعندما يكون $n=-2$ ، فإن

$$\Gamma(-2+1) = -2! \rightarrow \Gamma(-1) = \pm\infty$$

بذلك نستطيع القول بأن $\Gamma(n) = \pm\infty, n \in Z^{-} \cup \{0\}$

ملاحظة (2)

لحساب دالة جاما للقيم غير الصحيحة السالبة نستخدم النظرية (2-4)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

نظرية (2-5)

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^{n}$$

فعندما تكون n كبيرة يمكن أن نستخدم الصيغة $\Gamma(n+1) = n! \cong \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^{n}$ ، و تسمي بصيغة "سترلنج لدالة جاما"

البرهان

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n}dx = \int_0^\infty e^{n\ln x - x}dx$$

وحيث أن الدالة $nlnx - x$ لها نهاية عظمي عندما $x = n$ لذا نستخدم التعويض

$$x = n + y = n(1 + \frac{y}{n})$$

$$\Gamma(n+1) = e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{-nln(n+y)-y}dy = e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{nlnn+nln(1+\frac{y}{n})-y}dy$$

$$= n^n e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{nln(1+\frac{y}{n})-y}dy$$

وباستخدام النتيجة التالية سوف نحصل علي حلول تقريبية:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

نفرض أن $x = \frac{y}{n}$

$$\therefore \Gamma(n+1) \cong n^n e^{-n}\int_{-n}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots}dy$$

بوضع $v = \frac{y}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \Gamma(n+1) \cong n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{\frac{-v^2}{2}+\frac{v^3}{3\sqrt{n}}-\cdots}dv$$

$$\therefore \Gamma(n+1) \cong n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-v^2}{2}}dv \cong \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

نظرية (6−2)

$$(2n)! = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

البرهان

$$(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots(3)(2)(1)$$
$$= 2(n)2\left(n-\frac{1}{2}\right)2(n-1)2(n-\frac{3}{2})\cdots 2(\frac{3}{2})2(\frac{1}{2})$$

وبما أن:

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

كذلك $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ فإن:

$$\therefore (2n)!=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}n!\,\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

نظرية (7−2)

من أهم النظريات علي تعريف أويلر التكاملي هي:

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{mn}\right)$$

البرهان:

نفرض أن $x=y^{\frac{1}{n}}\rightarrow dx=\frac{1}{n}\ \ ^{\frac{1}{n}-1}dy$

$$\therefore\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{1}{mn}}y^{\frac{1}{n}-1}dy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}y^{\left(\frac{1+m-mn}{mn}\right)}dy$$

ولكن $\Gamma(z)=\int_0^\infty\ \ ^{-y}y^{z-1}\,dy$

$$\therefore\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{mn}\right)$$

(3) أمثلة تطبيقية علي دالة جاما

مثال (1)

احسب (أ) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ ، (ب) $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)$

الحل : (أ) حسب نظرية (4.2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

(ب) من الملاحظة (2)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \rightarrow \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

مثال (2)

احسب ، (ج) $\int_0^{\infty} 3^{-4z^2} dz$ ، (ب) $\int_0^1 (\ln(\frac{1}{x}))^{\frac{3}{2}} dx$ ، (أ) $\int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt$

الحل (أ) $\int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(5) = 4! = 24$

(ب) بفرض أن

$$u = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow e^{-u} = x \rightarrow -e^{-u} du = dx$$

$$x = 0 \rightarrow u = \infty, \qquad x = 1 \rightarrow u = 0$$

$$\therefore \int_0^1 (\ln(\frac{1}{x}))^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\infty}^0 u^{\frac{3}{2}} (-e^{-u}) du = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

(ج) $\int_0^{\infty} 3^{-4z^2} dz = \int_0^{\infty} e^{-4z^2 ln3} dz$

بفرض أن $u = 4z^2 ln3$

$$\therefore \int_0^{\infty} 3^{-4z^2} dz = \int_0^{\infty} e^{-4z^2 ln3} dz$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{4\sqrt{ln3}} = \frac{1}{4\sqrt{ln3}} \int_0^{\infty} u^{\frac{-1}{2}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{ln3}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{ln3}}$$

مثال (3)

اثبت أن $\Gamma(n) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{x}))^{n-1} dx \, , n > 0$

الحل بفرض أن:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = t \rightarrow x = e^{-t} \rightarrow dx = -e^{-t}dt$$

$$\int_0^1 (\ln(\tfrac{1}{x}))^{n-1}dx = \int_\infty^0 t^{n-1}(-e^{-t})dt = \int_0^\infty t^{n-1}(e^{-t})dt = \Gamma(n)$$

مثال (4) اثبت أن

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

الحل بما أن

$$\Gamma(x) = (x-1)! = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(3)(2)(1) \rightarrow (1)$$

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left(x-\tfrac{5}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{3}{2}\right)(\tfrac{1}{2})\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \rightarrow (2)$$

بضرب كل حد من حدود (1) في $\frac{2}{2}$

$$\Gamma(x) = \frac{(2x-2)(2x-4)\cdots(6)(4)(2)}{2^{x-1}}$$

باستخراج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك من كل حد من حدود (2)

$$\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^x}(2x-1)(2x-3)\cdots(3)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4)\cdots(4)(3)2\sqrt{\pi}}{2^x 2^{x-1}}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2x-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

مثال (5) بين أن

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

من تعريف (2-1)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

بوضع $1-z$ بدلا من z

$$\Gamma(1-z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 n}{z(z+1)\dots(z+n)(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}$$

تنسيق الحدود في المقام

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\frac{(n!)^2 n}{(1-z^2)(2^2-z^2)\cdots(n^2-z^2)(n+1-z)}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{z}{2}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{z}{n}\right)^2\right)}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n-z}\right)$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{n=1}^{m}\left(1-\left(\frac{z}{n}\right)^2\right)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n}\right)^2}\right)$$

وهو عبارة عن مفكوك $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

$$\therefore\ \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

الخلاصة:

إن دالة جاما عرفت بعدة صور و كل صورة اعتمدت علي مفهوم معين وتنوع هذه الصور أدي إلي تنوع استخدام دالة جاما في مسائل تطبيقية مختلفة، ودالة جاما نادرا ما تظهر في صورة تعريف (1−1) و (1−2) في التطبيقات و لكن في الأغلب تظهر في صورة تكاملات أي تظهر في صورة تعريف (1−3) وهو الأكثر شيوعا وعرفت جاما في غيره من الصور، وذلك لإمكانية حساب دالة جاما للأعداد السالبة.

المراجع

[1] الزوام دلة، عمر عاشور، محمد عريبي، الدوال الخاصة، 2003 .

[2] مواري شبيجل، الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلميين، 1971.

[3] مها عواد الكبيسي، الرياضيات المتقدمة، منشورات جامعة عمر المختار، 2004 .

[4] Larry C. Andrews, Special Function For Engineers and Applied mathematicians, Macmillan publishing company, New York, 1985.

[5] Farrell and Ross , Solved problems gamma and beta , The Macmillan company , New York , 1963.